Álgebra I (MA – 2221)
Guía de Ejercicios Nº 4

1.- En $\mathbb{Z}$ se define la operación $\circ$ por:

$$a \circ b = a + b + 1$$

Probar que $(\mathbb{Z}\,,\ \circ)$ es un grupo abeliano.

2.- Sea G el conjunto de números complejos $\{1, -1, i, -i\}$.
(a) Probar que G con la multiplicación usual es un grupo cíclico.
(b) Probar que $H = \{1, -1\}$ es un subgrupo de G.

3.- Sea $G = \{(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \colon a \neq 0\}$. En G se define la operación:

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$$

(a) Probar que $(G,*)$ es un grupo.
(b) ¿Es abeliano?
(c) Determinar si $H = \{(1, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\}$ es un subgrupo de G.

4.- Sea G un grupo tal que para todo $a \in G$ se satisface que $a^2 = e$. Pruebe que G es un grupo abeliano (considere $(ab)^2$).

5.- Probar que un grupo G es abeliano si y solo si para todos $a, b \in G$ se satisface que $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

6.- Sean a y b elementos de un grupo finito G. Pruebe que a, a^{-1} y bab^{-1} tienen el mismo orden.

7.- Sea:

$$M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_7,\ a \neq 0\right\}$$

Pruebe que M es un grupo con la multiplicación usual de matrices y encuentre el orden de los siguientes elementos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.- Sea G como en el ejercicio anterior, excepto que las entradas en las matrices son números reales. Pruebe que G tiene infinitos elementos de orden 2.

9.- Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
(a) Determine A^2 , A^3 y A^4.
(b) Verifique que $\{A, A^2\,, A^3\,, A^4\}$ es un grupo abeliano.
(c) Demuestre que el grupo de la parte (b) es isomorfo al grupo del ejercicio 2.

10.- Sobre un grupo multiplicativo cualquiera, hallar la solución de la ecuación:

$$axbcx = abx$$

11.- Probar que si H y K son subgrupos de G, entonces $H \cap K$ también es un subgrupo de G. ¿Será $H \cup K$ un subgrupo de G?

Prof. María Teresa Varela

12.- Probar que si H y K son subgrupos de un grupo abeliano G, entonces el conjunto $HK = \{hk : h \in H \; y \; k \in K\}$ es un subgrupo de G.

13.- Probar que si G es un grupo abeliano con identidad e, entonces el conjunto de todos los elementos $x \in G$ que satisfacen la ecuación $x^2 = e$ es un subgrupo de G.

14.- Sea G un grupo multiplicativo y sea $H = \{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G\}$.

(a) Probar que H es un subgrupo de G.

(b) Probar que G es abeliano si y solo si $H = \{e\}$.

15.- Determinar si las siguientes funciones son homomorfismos y, en caso de serlo, hallar el núcleo y la imagen.

(a) $f: (\mathbb{R}^*,\cdot) \to (\mathbb{R}^*,\cdot)$, $f(x) = x^2$

(b) $f: (\mathbb{R}^*,\cdot) \to (\mathbb{R}^*,\cdot)$, $f(x) = 2^x$

(c) $f: (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R},+)$, $f(x) = x + 1$

(d) $f: (\mathbb{R}^*,\cdot) \to (\mathbb{R}^*,\cdot)$, $f(x) = |x|$

(e) $f: (\mathbb{R}^3,+) \to (\mathbb{R}^2,+)$, $f(x,y,z) = (x - z, y - z)$

16.- Sea G un grupo multiplicativo y $a \in G$ fijo. Se define $f: G \to G$ por $f(x) = axa^{-1}$. Probar que f es un isomorfismo.

17.- Sea $(G,*)$ un grupo. En G se define otra operación $\circ$ por $a \circ b = b * a$.

(a) Probar que $(G,\circ)$ es un grupo.

(b) Sea $f: (G,*) \to (G,\circ)$ definida por $f(x) = x'$ (x' es el inverso de x). Probar que f es un isomorfismo.

18.- Probar que $(\mathbb{Z},+)$ y $(\mathbb{Q},+)$ no son isomorfos.

19.- Pruebe que si H es un subgrupo de un grupo abeliano G, entonces toda clase lateral derecha de H es también una clase lateral izquierda de H.

20.- Pruebe que si H es un subgrupo de índice 2 en un grupo finito G, entonces toda clase lateral derecha de H es también una clase lateral izquierda de H.

21.- Sea G un grupo con subgrupos H y K. Si $|G| = 660$, $|K| = 66$ y $K \subset H \subset G$. ¿Cuáles son los posibles valores de $|H|$?

22.- Sean H y K subgrupos de un grupo G, y sea e el neutro de G.
(a) Pruebe que si $|H| = 10$ y $|K| = 21$, entonces $H \cap K = \{e\}$.
(b) Pruebe que si $|H| = m$ y $|K| = n$, con mcd(m,n) = 1, entonces $H \cap K = \{e\}$.

Prof. María Teresa Varela